4ème.sc

Série 21

Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+2\ln(x)$

1/ Dresser le tableau de variation de f

2/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=f(x)-x$

a) Dresser le tableau de variation de h

b) Montrer que l'équation f(x)=x admet exactement deux solutions qui sont 1 et $\alpha\in]3,4[$

3/ a) Montrer que pour tout x de $]3,4[$, on a : $0\le f'(x)\le\frac{2}{3}$

b) En déduire que pour tout x de $]3,4[$, on a : $|f(x)-\alpha|\le\frac{2}{3}|x-\alpha|$

4/ On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}U_0=3\\U_{n+1}=f(U_n)\ ,\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $3\le U_n\le 4$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1}-\alpha|\le\frac{2}{3}|U_n-\alpha|$

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $|U_n-\alpha|\le(\frac{2}{3})^n$ .En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

Exercice N°2

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1/ Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre I(1 , -2 , 0) et de rayon R = 2

2/ Montrer que la sphère S est tangente au plan P : $x+2y-2z+9=0$

3/ Soit Q le plan d'équation : $-2x+y-1=0$. Déterminer $S\cap Q$

4/ a) Montrer que $P\perp Q$

b) Soit $D=P\cap Q$, montrer que $d(I,D)=3$

5/ On considère les plans P_m d'équations : $mx+\ln(m)=0$; $m\in[1\ ,\ +\infty[$

a) Calculer $d(I\ ,\ P_m)$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $[1\ ,+\infty[$ par $f(m)=1+\frac{\ln(m)}{m}$

c) Montrer que pour tout $m\in[1,+\infty[$, $P_m\cap S$ est un cercle

Exercice N°3

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $A(1,2,2)$; $B(3,2,1)$ et $C(1,3,3)$

1/ Montrer que les points A,B et C déterminent un plan P. Donner une équation cartésienne de P

2/ On considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives : $P_1: x-2y+2z-1=0$ et $P_2: x-3y+3z-1=0$

a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants. On note Δ leur droite d'intersection.

b) Montrer que le point C appartient à Δ

c) Calculer $d(A,\Delta)$

3/Soit le point D(1,1,-1) . Vérifier que le quadrilatère ABCD est tétraèdre et Calculer son volume

Exercice N°4

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On donne les points $A(1,1,-2);B(1,2,-2)$ et $C(0,1,1)$

1/a) Montrer que les points A,B et C définissent un plan P

b) Vérifier qu'une équation du plan P est : $3x-z-1=0$

2/Soit le point $D(-2,1,3)$

Montrer que ABCD est tétraèdre puis calculer son volume

3/a) Donner une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à (AC)

b) Montrer que P et Q sont perpendiculaires suivant (AB)

4/ Soit S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tel que : $x^2+y^2+z^2-2x-2my+4z+4=0$; $m\in\mathbb{R}$

a) Montrer que pour tout réel m , S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m

b) Montrer que I_m décrit la droite (AB) lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

c) Déterminer l'intersection de S_m avec le plan P

Exercice N°5

Une usine fabrique en grande série de climatiseurs susceptibles de présenter deux défauts a et b .
Une étude statistique de la production conduit aux résultats suivants :

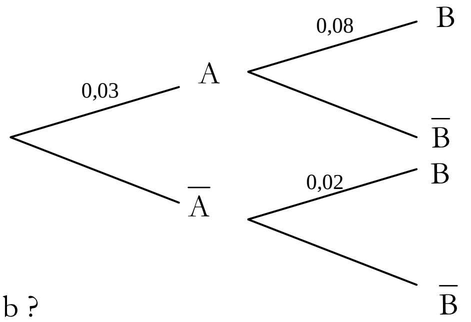
- 3% des climatiseurs présentant le défaut a.
- Parmi les climatiseurs présentant le défaut a, 8% présentent le défaut b
- Parmi les climatiseurs ne présentant pas le défaut a, 2% présentent le défaut b

On prélève au hasard un climatiseur dans la production. On désigne par A et B les évènements suivants :

A « Le climatiseur présente le défaut a »

B « Le climatiseur présente le défaut b »

1/ L'arbre pondéré ci-contre représente cette situation.
Recopier et compléter cet arbre.



2/ Pour cette question, on donnera les résultats à 10^{-3} prés

a) Quelle est la probabilité que ce climatiseur présente à la fois les deux défauts a et b ?

b) Quelle est la probabilité que ce climatiseur présente le défaut b ?

c) Quelle est la probabilité que ce climatiseur ne présente aucun défaut ?

d) Sachant que ce climatiseur présente le défaut b, quelle est la probabilité qu'il présente le défaut a ?

3/ La durée de vie d'un climatiseur avant qu'il subisse la première panne exprimée en année est une variable aléatoire X définie sur $[0,+\infty[$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0.02$

a) Quelle est la probabilité qu'un climatiseur dure moins de 8 ans ?

b) Quelle est la probabilité qu'un climatiseur dure plus de 5 ans ?

c) Quelle est la probabilité qu'un climatiseur dure moins de 8 ans, sachant qu'il fonctionne depuis 5 ans ?